Mathematik der Ästhetik

Prof. Dr. Batu Güneysu

Technische Universität Chemnitz

Kulturgut Mathematik und Kunst
Schlossbergmuseum Chemnitz, 25.10.2023

- Teilwise motiviert von einer Arbeit von Rigau / Feixas / Sbert (2008)
- Programmierung von Dr. Sebastian Boldt

Die erste Versuch den Begriff der **Ästhetik** für Bilder zu formalisieren stammt vom amerikanischen Mathematiker **George David Birkhoff** aus dem Jahre 1933:

Das **ästhetische Maß** M eines Bildes ist als eine Funktion $f(O, C)$ der **Ordnung** O des Bildes und der **Komplexität** C des Bildes gegeben:

$$M = f(O, C).$$

Der Begriff **Ordnung** ist hier als **Maß der Geordnetheit** oder als **Maß dafür, wie gut sich das Bild in Komponenten zerlegen lässt** zu verstehen. Diese Definition macht für beliebige Objekte Sinn.

Wie können wir diese Daten nun konkret bestimmen?

Um die funktionale Abhängigkeit dieser Größen vom gegebenen Bild B zu verdeutlichen, schreiben wir auch

$$M = M(B), \quad O = O(B), \quad C = C(B).$$

Zunächst zur funktionellen Abhängigkeit $f(O, C)$: Wir schlagen

$$f(O, C) := O \cdot C$$

vor, also

$$M = O \cdot C.$$

Diese Definition gewährleistet, dass bei zwei Bildern der gleichen Komplexität das Bild mit größerer Ordnung als ästhetischer bewertet wird. Analog gewinnt bei gleicher Ordnung die größere Komplexität: Das Bild ist dann sozusagen weniger langweilig.

Eine sinnvolle Wahl der Funktion $f(O, C)$ hängt vom Kontext der Betrachtung ab. Wir stellen uns einen Museums- oder Galleriebesuch vor, so dass ein gewisser Unterhaltungseffekt bei der Betrachtung eine Rolle spielen sollte. Birkhoff selbst schlägt O/C statt $O \cdot C$ vor...

Um mathematische Definitionen der Größen $O(B)$ und $C(B)$ angeben zu können, werden wir nun einen kleinen Ausflug in die Stochastik bzw. Informationstheorie wagen:

- Eine **Zufallsvariable** X mit Werten in der endlichen Menge $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ordnet per Definition jedem Zufallsexperiment genau einen der Werte $x_1, \ldots, x_m$ zu.
- Die **Wahrscheinlichkeit** dafür, dass X den Wert x_i annimmt wird mit $P(X = x_i)$ bezeichnet. Dies ist eine Zahl, die jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen kann.
- Sind all diese Wahrscheinlichkeiten gleich, also $P(X = x_i) = P(X = x_j)$ für alle $i, j = 1, \ldots, m$, so nennt man X **gleichmäßig verteilt**.
- In der Praxis bekommt man diese Werte durch abzählen....

Beispiel 1: Ist X das Würfeln mit einem normalen Würfel, so nimmt X Werte in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ an, und es gilt $P(X = i) = 1/6$ für alle $i = 1, \ldots, 6$, d.h. X ist gleichmäßig verteilt.

Beispiel 2: Sei X das Würfeln mit einem Gaunerwürfel, welcher drei Flächen mit der Augenzahl 6, sowie jeweils eine Fläche mit der Augenzahl 1, 2, 3 hat. Dann nimmt X Werte in $\{1, 2, 3, 6\}$ an, und es gilt

$$P(X = 6) = \frac{\text{Anzahl der Flächen mit Augenzahl 6}}{\text{Anzahl aller Flächen}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

und für $i = 1, 2, 3$,

$$P(X = i) = \frac{\text{Anzahl der Flächen mit Augenzahl } i}{\text{Anzahl aller Flächen}} = \frac{1}{6}.$$

Ist X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{x_1, \dots, x_m\}$, so definiert man die **Entropie** $H(X)$ von X als

$$H(X) := -\sum_{i=1}^{m} P(X = x_i) \log P(X = x_i).$$

Es gilt $H(X) \geqslant 0$ und

- $H(X)$ wird maximal genau dann, wenn X gleichmäßig verteilt ist.
- $H(X)$ wird minimal genau dann wenn, X deterministisch ist (also nicht vom Zufall abhängt).

In diesem Sinne ist die Entropie ein Maß für die **Unordnung von** X.

Ist Y eine weitere Zufallsvariable die nur endlich viele Werte $\{y_1, \ldots, y_n\}$ annimmt, so heißt die Zahl

$$H(X|Y) := -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j) \log P(X = x_i | Y = y_j)$$

die **durch Y bedingte Entropie von X**. Es gilt stets $0 \leqslant H(X|Y) \leqslant H(X)$ und

- $H(X|Y)$ wird maximal, wenn X und Y unabhängig sind.
- $H(X|Y)$ wird minimal, wenn X vollständig durch Y bestimmt ist.

In diesem Sinne misst $H(X|Y)$ die Unsicherheit von X, falls Y kennen.

Die Zahl

$$I(X, Y) := H(X) - H(X|Y) \geqslant 0$$

heißt die **Transinformation von X und Y**.

Es gilt $I(Y, X) = I(X, Y)$ und es gilt $I(X, Y) = 0$ genau dann, wenn X und Y unabhängig sind.

In diesem Sinne misst $I(X, Y)$, wieviel wir über X sagen können, wenn wir Y kennen (und umgekehrt).

Wir stellen Bilder als Matrizen von Pixeln dar. Jedes Pixel kann einen der Farbtöne $\{0, 1, \ldots, m\}$ annehmen.

Um eine Definition für die Ordnung eines Bildes B zu erhalten, haben wir einen Algorithmus entwickelt, der B sukzessive immer weiter aufteilt, mit dem Ziel B in seine 'Farbzusammenhangskomponenten' aufzuteilen. Je aufwendiger dieses Verfahren ist, desto unordentlicher soll das Bild per Definitionem sein.

Vorbereitung: Für ein Bild B definiere eine Zufallsvariable X_B mit

$$P(X_B = f_i) = \frac{\text{Anzahl der Pixel in } B \text{ mit Farbton } f_i}{\text{Anzahl aller Pixel in } B}, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Ist $\mathscr{Z}$ eine Zerlegung von B in n disjunkte Teilbilder $B_1, \ldots, B_n$ von B, so sei die Zufallsvariable $Y_{\mathscr{Z}}$ definiert durch

$$P(Y_{\mathscr{Z}} = B_j) = \frac{\text{Anzahl aller Pixel in } B_j}{\text{Anzahl aller Pixel in } B}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Der Algorithmus läuft nun wie folgt ab:

- Im ersten Schritt erzeugen wir zwei Teilbilder B_1 und B_2 von B, indem wir eine Zerlegung von B in zwei disjunkte Teilbilder B_1, B_2 von B so wählen, dass für die induzierte Zerlegung $\mathscr{Z}$ von B die Information $I(X_B, Y_{\mathscr{Z}})$ maximal wird.
- Im zweiten Schritt wiederholen wir die Prozedur mit B_1 statt B und mit B_2 statt B und bekommen zwei Teilbilder von B_1, sowie zwei Teilbilder von B_2, also vier Teilbilder von B.
- Im n-ten Schritt haben wir somit eine Zerlegung $\mathscr{Z}_n$ von B in 2^n Teilbilder von B produziert.
- Wir brechen ab, wenn der Informationszuwachs vom n-ten zum $(n+1)$-ten Schritt unter einem fixierten Wert liegt:

$$I(X_B, Y_{\mathscr{Z}_{n+1}})/I(X_B, Y_{\mathscr{Z}_n}) < 1 + \epsilon \quad \text{mit } \epsilon > 0 \text{ sehr klein.}$$

Sei n_B genau diese Anzahl von Schritten.

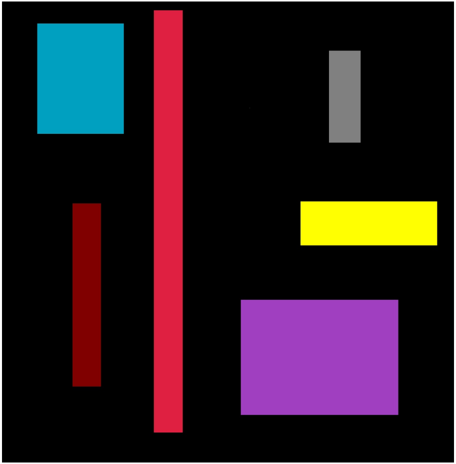
Die **Ordnung eines Bildes** B definieren wir als die Zahl

$$O(B) := I\big(X_B, Y_{\mathscr{Z}_{n_B}}\big)/H(X_B).$$

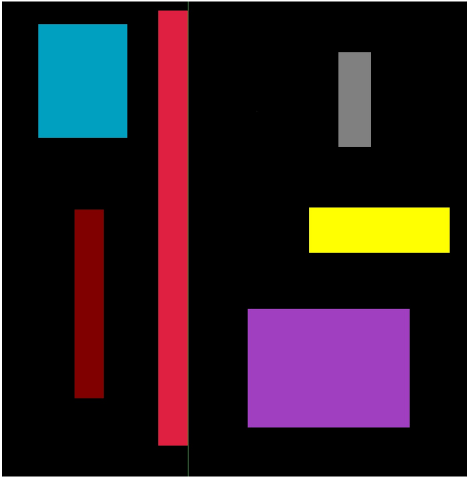
Diese Definition ist durch folgende beiden Tatsachen begründet:

- Es gilt $0 \leqslant O(B) \leqslant 1$, die Ordnung ist also normiert.
- $O(B_1) > O(B_2)$ bedeutet gerade, dass sich das Bild B_1 mit weniger Aufwand als das Bild B_2 in seine Farbzusammenhangskomponenten zerlegen lässt und in diesem Sinne eine höhere Ordnung hat.

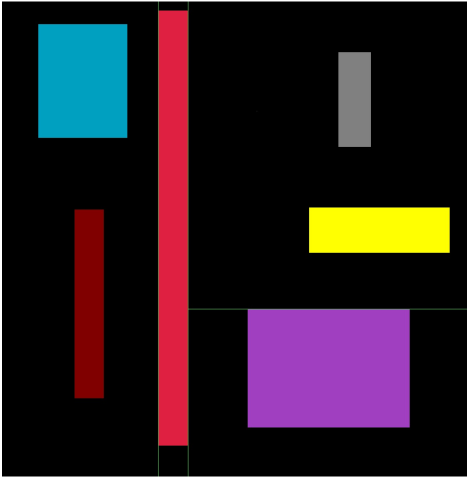
Betrachten wir das Bild **Rechteck**:



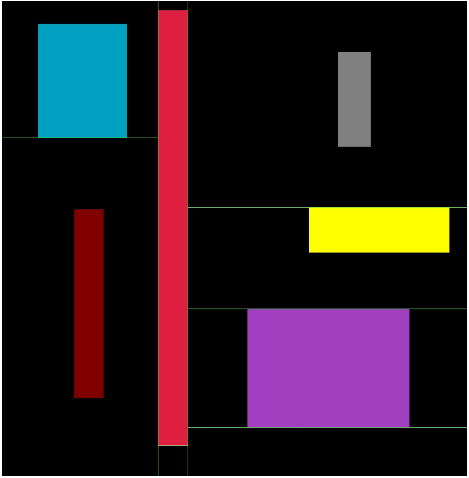
Der erste Schritt des Algorithmus liefert folgende Unterteilung:



Der zweite Schritt des Algorithmus liefert folgende Unterteilung:

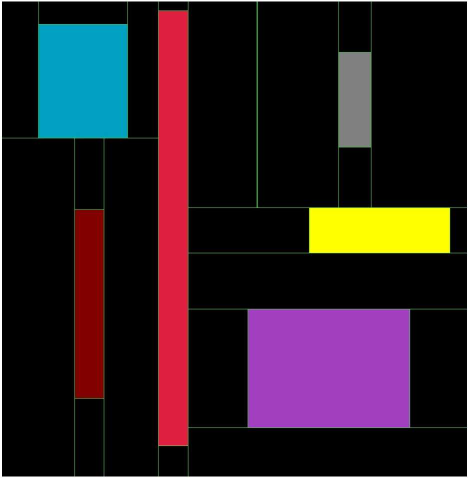


Der dritte Schritt des Algorithmus liefert folgende Unterteilung:



Und so weiter.....

Unser Algorithmus benötigt insgesamt 7 Schritte und liefert eine Ordnung von $O(\textbf{Rechteck}) = 0,9999$:



Betrachten wir das Bild **Skull** von J.-M. Basquiat (1981):

Unser Algorithmus benötigt 12 Schritte und liefert eine Ordnung von $O(\textbf{Skull}) = 0,4560$:

Kommen wir nun zur Komplexität. Der folgende abstrakte Komplexitätsbegriff stammt vom russischen Mathematiker Andrey Kolmogorov aus dem Jahre 1963:

Die **Kolmogorov-Komplexität** des Worts $w = w_1, \ldots, w_s$ mit Buchstaben w_i aus dem Alphabet $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$ ist definiert als die Länge des kürzesten Programms, das w beschreiben kann.

Beispiel zur Illustration der Definition: Das Wort

$$w = 0,0,3,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0$$

mit Buchstaben aus $\{0,1,2,3,4\}$ kann mit dem Programm

Schreibe '$0,0,3,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0$'

beschrieben werden, oder mit dem kürzeren Programm

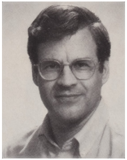
Schreibe '$0,0,3,4$' dann 24 mal '$,0$'

beschrieben werden. Aber leider kann man Folgendes beweisen:

> Es gibt keinen Algorithmus, der die Kolmogorov Komplexität ausrechnen kann.

Wir suchen stattdessen einen (verlustfreien) Kompressionsalgorithmus, der die Kolomogorov-Komplexität approximiert: LZW-Algorithmus, 1978/1983:

(a)



(b)

Abbildung: (a) Jacob Ziv, Abraham Lempel **(b)** Terry Welch

Der Algorithmus bekommt ein Wort $w = (w_1, \cdots, w_s)$ mit Buchstaben aus dem Alphabet $\{0, \dots, m\}$ als Eingabe und erzeugt ein kürzeres Wort $\widetilde{w}$ als Ausgabe:

- Setze das Wörterbuch zu $\{(0) \leftrightarrow 0, (1) \leftrightarrow 1, \ldots, (m) \leftrightarrow m\}$; hier steht jeweils links das Wort und rechts das zugehörige Codewort;
- setzte das Hilfswort zu w;
- setze das virtuelle Alphabet zu $\{0, 1, \ldots, m\}$;
- setze das Ausgabewort als $()$;
- solange das Hilfswort nicht leer ist:
  - suche im Hilfswort von links nach rechts das längste Teilwort $(w_1, \ldots, w_q)$, das im Wörterbuch steht;
  - erweitere das Ausgabewort nach rechts mit dem $(w_1, \ldots, w_q)$ zugeordneten Code;
  - erweitere das Wörterbuch mit dem Wort $(w_1, \ldots, w_{q+1})$ mit zugehörigem Code gegeben als das kleinste $n \geqslant m$, das noch nicht im virtuellen Alphabet ist;
  - erweitere das virtuelle Alphabet mit n;
  - kürze im Hilfswort $(w_1, \ldots, w_q)$ von links;

Das komprimierte Wort $\widetilde{w}$ ist dann gerade das finale Ausgabewort.

Beispiel:

Alphabet: $\{0, \ldots, 7\}$

$w = (1, 2, 4, 1, 2, 7, 0, 1, 2, 7, 1, 2)$

Wörterbuch: $\{(0) \leftrightarrow 0, (1) \leftrightarrow 1, \ldots, (7) \leftrightarrow 7\}$

Hilfswort: $(1, 2, 4, 1, 2, 7, 0, 1, 2, 7, 1, 2)$

Virtuelles Alphabet: $\{0, \ldots, 7\}$

Hilfswort	längstes Teilwort im Wörterbuch	Erweiterung des Ausgabeworts um...	Erweiterung des Wörterbuchs um...
(1,2,4,1,2,7,0,1,2,7,1,2)	(1)	1	(1,2) $\leftrightarrow$ 8
(2,4,1,2,7,0,1,2,7,1,2)	(2)	2	(2,4) $\leftrightarrow$ 9
(4,1,2,7,0,1,2,7,1,2)	(4)	4	(4,1) $\leftrightarrow$ 10
(1,2,7,0,1,2,7,1,2)	(1,2)	8	(1,2,7) $\leftrightarrow$ 11
(0,1,2,7,1,2)	(0)	0	(0,1) $\leftrightarrow$ 12
(1,2,7,1,2)	(1,2,7)	11	(1,2,7,1) $\leftrightarrow$ 13
(1,2)	(1,2)	8	-

Also wird das Wort $w = (1, 2, 4, 1, 2, 7, 0, 1, 2, 7, 1, 2)$ komprimiert zum kürzeren Wort $\widetilde{w} = (1, 2, 4, 8, 0, 11, 8)$.

Es macht keinerlei Probleme den LZW-Algorithmus zeilenweise auf Matrizen statt auf Wörter (= Vektoren) anzuwenden. Dies führt zu:

Die **Komplexität eines Bildes** B definieren wir als die Kompressionsrate

$$C(B) := \frac{\text{Größe von } \widetilde{B} \text{ in Bytes}}{\text{Größe von } B \text{ in Bytes}}.$$

- Es gilt wieder die Normierung $0 \leqslant C(B) \leqslant 1$.
- $C(B_1) > C(B_2)$ bedeutet gerade, dass sich B_1 schlechter als B_2 komprimieren lässt und in diesem Sinne komplexer ist.

Für das Bild **Skull** erhalten wir eine Komplexität von $C(\textbf{Skull}) = 0,1601$ und somit das ästhetische Maß zu

$$\begin{aligned} M(\textbf{Skull}) &= O(\textbf{Skull}) \cdot C(\textbf{Skull}) \\ &= 0,4560 \cdot 0,1601 = 0,0730. \end{aligned}$$

Für das Bild **Rechteck** erhalten wir eine Komplexität von $C(\textbf{Rechteck}) = 0,0602$ und somit das ästhetische Maß zu

$$\begin{aligned} M(\textbf{Rechteck}) &= O(\textbf{Rechteck}) \cdot C(\textbf{Rechteck}) \\ &= 0,9999 \cdot 0,0602 = 0,0601. \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

- Wir haben das ästhetische Maß $M(B)$ eins Bildes B definiert als das Produkt $O(B) \cdot C(B)$, mit $O(B)$ der Ordnung und $C(B)$ der Komplexität.
- Die Ordnung ermitteln wir, indem wir algorithmisch das Bild in seine Farbzusammenhangskomponenten zerlegen. Je aufwendiger dies ist, desto weniger Ordnung hat das Bild.
- Die Komplexität definieren wir als eine (verlustfreie) Komprimierbarkeit.
- Der Mangel an Komplexität kann durch eine erhöhte Ordnung ausgeglichen werden (und umgekehrt).
- Ausblick...

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!